Lernmatrix de Steinbuch: Avances teóricos.

Sánchez-Garfias, F. A., Díaz-de-León S., J. L., Yánez-Márquez, C.
Laboratorio de Reconocimiento de Patrones y Procesamiento de Imágenes
Centro de Investigación en Computación, I. P. N.
07738 México, D. F.
Tel. (55) 5729-6000 ext. 56561. e-mail fgarfias@correo.cic.ipn.mx, {jdiaz,cyanez}@cic.ipn.mx

RESUMEN

Este artículo es la continuación del trabajo presentado en [1] y muestra los avances en el desarrollo de un marco teórico para describir el comportamiento de la Lernmatrix, Memoria Asociativa creada en 1961 por el científico alemán Karl Steinbuch.
Los resultados obtenidos permiten colocar a la Lernmatrix, después cuatro décadas de haber surgido, como una buena alternativa para clasificación y reconocimiento de patrones.

Palabras clave:
Reconocimiento de Patrones, Memorias Asociativas, Lernmatrix.

Introducción

Las Memorias Asociativas han merecido la atención de numerosos investigadores internacionales desde hace más de cuatro décadas. Uno de los pioneros fue el científico alemán Karl Steinbuch quien, a principios de la década de los sesenta, ideó, desarrolló y aplicó la Lernmatrix [2,3].

La Lernmatrix constituye un antecedente crucial en el desarrollo de los modelos actuales de memorias asociativas, y constituye uno de los primeros intentos exitosos de codificar información en arreglos cuadriculados conocidos como crossbar (Simpson, 1990).

Una memoria asociativa tiene como propósito fundamental: recuperar correctamente patrones completos a partir de patrones de entrada, los cuales pueden estar alterados con ruido aditivo, sustractivo combinado.

El problema inherente al funcionamiento de las memorias asociativas se escinde en dos fases claramente distinguibles:

1. Fase de aprendizaje (generación de la memoria asociativa)
2. Fase de recuperación (operación de la memoria asociativa)

En ambas fases, una memoria asociativa M puede formularse como un sistema de entrada y salida, idea que se esquematiza a continuación:

$$x? \ \boxed{\ M\ } \ ? \ y$$

El patrón de entrada está representado por un vector columna denotado por x y el patrón de salida, por el vector columna denotado por y. Cada uno de los patrones de entrada forma una asociación con el correspondiente patrón de salida. La notación para una asociación es similar a la de una pareja ordenada; por ejemplo, los patrones x y y del esquema forman la asociación (x,y).

Dado un número entero positivo k específico, la asociación correspondiente será (x^k, y^k)

La memoria asociativa M se representa mediante una matriz cuya componente ij-ésima es m_{ij} (Palm, Schwenker, Sommer & Strey, 1997); la matriz M se genera a partir de un conjunto finito de asociaciones conocidas de antemano: éste es el conjunto fundamental de asociaciones, o simplemente conjunto fundamental. Se denota por p la cardinalidad del conjunto fundamental (p es un número entero positivo).

Si μ es un índice, el conjunto fundamental se representa de la siguiente manera:

$$\{(x^\mu, y^\mu) \mid \mu = 1,2,..,p\}$$

Definición 1. A los patrones que conforman las asociaciones del conjunto fundamental, se les llama patrones fundamentales.

La naturaleza del conjunto fundamental proporciona un importante criterio para clasificar las memorias asociativas [4].

Definición 2. Si se cumple que $x^\mu = y^\mu$ $\forall \mu = 1,2,..,p$, *se dice que la memoria es*

J. Díaz de León, G. González, J. Figueroa (Eds.): Avances en Ciencias de la Computación, pp. 236-244, 2003.

autoasociativa; de otro modo, la memoria es heteroasociativa. Para una memoria heteroasociativa se puede afirmar lo siguiente: $\exists \mu \in \{1,2,..,p\}$ *para el que se cumple que* $x^\mu \neq y^\mu$.

Definición 3. Si al presentarle a la memoria M un patrón alterado $\tilde{x}^\omega$ *como entrada* $(\omega \in \{1,2,...,p\})$, *M responde con el correspondiente patrón fundamental de salida* y^ω, *se dice que la recuperación es perfecta.*

Definición 4. Una memoria perfecta es aquella que realiza recuperaciones perfectas para todos los patrones fundamentales.

A y B son dos conjuntos que cumplen con lo siguiente: las componentes de los vectores columna que representan a los patrones, tanto de entrada como de salida, son elementos del conjunto A, y las entradas de la matriz M son elementos del conjunto B.

No hay requisitos previos ni limitaciones respecto de la elección de estos dos conjuntos, por lo que no necesariamente deben ser diferentes o poseer características especiales. Sean m, n números enteros positivos. Se denota por n la dimensión de los patrones de entrada, y por m la dimensión de los patrones de salida; claramente, nada impide que los valores de m y de n sean iguales. Aún más, uno de los requisitos que debe cumplir una memoria autoasociativa es que la dimensión de los patrones de entrada sea igual a la dimensión de los patrones de salida; por otro lado, si en una memoria sucede que m?n, es evidente que la memoria debe ser heteroasociativa.

Cada vector columna que representa a un patrón de entrada tiene n componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A, y cada vector columna que representa a un patrón de salida posee m componentes cuyos valores pertenecen al conjunto A. Es decir:

$$x^\mu \in A^n \text{ y } y^\mu \in A^m, \ \forall \mu = 1,2,..,p$$

La j-ésima componente de un vector columna se indica con la misma letra del vector, pero sin negrilla, colocando a j como subíndice ($j \in \{1,2,..,n\}$ o $j \in \{1,2,..,m\}$ según corresponda). La j-ésima componente de un vector columna x^μ se representa por

$$x_j^\mu$$

Los vectores columna que representan a los patrones fundamentales de entrada y de salida son, respectivamente:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \cdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n \text{ y } y^\mu = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \cdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \in A^m$$

No obstante que Steinbuch presentó la Lemmatrix hace más de cuatro décadas, ningún investigador, incluyendo al propio Steinbuch, se ha dado a la tarea de estudiar con rigor científico las condiciones necesarias y suficientes para recuperación perfecta del conjunto fundamental y de patrones que no pertenezcan a éste. El primer paso se dio en [1] y el presente trabajo es un escalón más en la construcción de un marco teórico que describa matemáticamente el comportamiento de la Lemmatrix.

II. La Lernmatrix.

La Lemmatrix es una memoria heteroasociativa que puede funcionar como un clasificador de patrones binarios si se escogen adecuadamente los patrones de salida; es un sistema de entrada y salida que al operar acepta como entrada un patrón binario $x^\mu \in A^n$, $A = \{0,1\}$ y produce como salida la clase $y^\mu \in A^m$ que le corresponde (de entre m clases diferentes), codificada ésta con un método simple, a saber: para representar la clase $k \in \{1,2,..,m\}$, se asignan a las componentes del vector de salida y^μ los siguientes valores: $y_k^\mu = 1$, y $y_j^\mu = 0$ para $j = 1,2,..,k-1,k+1,..,m$.

En la tabla se esquematiza la fase de aprendizaje para la Lemmatrix de Steinbuch, con la pareja de patrones fundamentales $(x^\mu, y^\mu) \in A^n x A^m$

	x_1^μ	x_2^μ	...	x_j^μ ...	x_n^μ
y_1^μ	m_{11}	m_{12}		m_{1j}	m_{1n}
y_2^μ	m_{21}	m_{22}		m_{2j}	m_{2n}
y_i^μ	m_{i1}	m_{i2}		m_{ij}	m_{in}
y_m^μ	m_{m1}	m_{m2}		m_{mj}	m_{mn}

Cada uno de los componentes m_{ij} de M, la Lemmatrix de Steinbuch, tiene valor cero al inicio, y se actualiza de acuerdo con la regla $m_{ij} = m_{ij} + \Delta m_{ij}$, donde:

$$\Delta m_{ij} = \begin{cases} +\varepsilon \text{ si } y_i^{\mu} = 1 = x_j^{\mu} \\ -\varepsilon \text{ si } y_i^{\mu} = 1 \text{ y } x_j^{\mu} = 0 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

siendo ε una constante positiva escogida previamente.

La fase de recuperación consiste en encontrar la clase a la que pertenece un vector de entrada $x^{\omega} \in A^n$ dado.
Encontrar la clase significa obtener las coordenadas del vector $y^{\omega} \in A^m$ que le corresponde al patrón x^{ω}; en virtud del método de construcción de los vectores y^{μ} la clase debería obtenerse sin ambigüedad.
La i-ésima coordenada y_i^{ω} del vector de clase $y^{\omega} \in A^m$ se obtiene como lo indica la siguiente expresión, donde $\bigvee$ es el operador máximo:

$$y_i^{\omega} = \begin{cases} 1 \text{ si } \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j^{\omega} = \bigvee_{h=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} m_{hj} x_j^{\omega} \right] \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

La forma en como Steinbuch planteó las fases de aprendizaje y recuperación para su memoria son poco útiles para la descripción de su funcionamiento. De esta forma, lo primero que se plantea es una caracterización alterna de dichas fases, de modo que su manipulación matemática sea más fácil. Dicha caracterización introduce el concepto de función de Steinbuch. [1]

Definición 5. Llamaremos función de Steinbuch a una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpla con la siguiente propiedad:

$$f(0) = -1$$
$$f(1) = 1$$

Definición 6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Steinbuch. Llamaremos función vectorial de Steinbuch con respecto a f a una función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que:

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Así, se está en condiciones de proponer una caracterización alterna para las fases de aprendizaje y recuperación, la cual es mucho más útil para los fines del presente trabajo.

Fase de Aprendizaje de la Lemmatrix

Sea $\{(x^{\mu}, y^{\mu}) \mid \mu = 1,2,..,m\}$ un conjunto fundamental y F una función vectorial de Steinbuch con respecto a f. La Lemmatrix M para el conjunto fundamental se construye de acuerdo con la siguiente regla:

$$M = \sum_{\mu=1}^{m} y^{\mu} \bullet (F(x^{\mu}))^T \qquad (1)$$

Fase de recuperación de la Lemmatrix

Sea M una Lemmatrix y x^{ω} un patrón de dimensión n. El patrón $\tilde{y}^{\omega}$ recuperado a partir de x^{ω} y M se determina de la siguiente forma:

$$z^{\omega} = M \bullet x^{\omega}$$

$$y_i^{\omega} = \begin{cases} 1 \text{ si } z_i^{\omega} = \bigvee_{h=1}^{m} z_h^{\omega} \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \qquad (2)$$

Donde $\tilde{y}^{\omega}$ no es necesariamente igual a y^{ω}. En particular, si $\tilde{y}^{\omega} = y^{\omega}$, entonces la recuperación es perfecta, de acuerdo con la definición 3.

III. Condiciones para recuperación perfecta

La importancia del trabajo de Sánchez-Garfias, Díaz-de-León y Yáñez-Márquez (2002), es que se propone un lema, un teorema y un corolario en los cuales se dan las condiciones necesarias y suficientes para recuperación perfecta. En el presente trabajo, se propone una nueva descripción de la Lemmatrix, que contiene a la planteada en el trabajo antes mencionado y que sintetiza de una forma más adecuada su funcionamiento.

Definición 7. Sea $A = \{0,1\}$ y sean x^{α}, $x^{\beta} \in A^n$ dos patrones. Se dice que x^{α} es igual que x^{β} (simbolizado $x^{\alpha} = x^{\beta}$) si y sólo si $\forall i \in \{1,2,..,n\}$ se cumple que $x_i^{\alpha} = x_i^{\beta}$.

Definición 8. Sea $A=\{0,1\}$ *y sean* x^{α}, $x^{\beta}\in A^{n}$ *dos patrones. Se dice que* x^{α} *es menor o igual que* x^{β} *(simbolizado* $x^{\alpha}\le x^{\beta}$*) si y sólo si* $\forall i\in\{1,2,..,n\}$ *se cumple que* $x_i^{\alpha}=1\rightarrow x_i^{\beta}=1$.

Ejemplo 1. Sean $x^{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ y $x^{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ entonces $x^{\alpha}\le x^{\beta}$, ya que $\forall i\in\{1,2,3,4,5,6\}$ se cumple que $x_i^{\beta}=1$ cada vez que $x_i^{\alpha}=1$

Ejemplo 2. Sean $x^{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ y $x^{\beta}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ entonces es falso que $x^{\alpha}\le x^{\beta}$, ya que $x_1^{\beta}=0$ y $x_1^{\alpha}=1$.

Definición 9. Sea $A=\{0,1\}$ *y sea* $x^{\omega}\in A^{n}$ *un patrón. Llamaremos conjunto característico de* x^{ω} *al conjunto de índices* $T^{\omega}=\{i\mid x_i^{\omega}=1\}$. *La cardinalidad de éste conjunto la denotaremos* $|T^{\omega}|$

Ejemplo 3. Sean $x^{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, entonces $T^{\alpha}=\{1,3\}$, ya que $x_1^{\alpha}=1$ y $x_3^{\alpha}=1$. También, $|T^{\alpha}|=2$.

El concepto de conjunto característico es la columna vertebral que sustenta al presente trabajo. El primer paso será, entonces, establecer una relación entre dicho concepto, las relaciones de orden y la Lernmatrix.

Lema 1. Sea $A=\{0,1\}$ *y sean* x^{α}, $x^{\beta}\in A^{n}$ *dos patrones, entonces* $x^{\alpha}\le x^{\beta}\Leftrightarrow T^{\alpha}\subseteq T^{\beta}$

Demostración. Sea $A=\{0,1\}$ y sean x^{α}, $x^{\beta}\in A^{n}$ dos patrones, entonces por la definición 8.

$$x^{\alpha}\le x^{\beta}\Leftrightarrow\left[\forall i\in\{1,2,..,n\},x_i^{\alpha}\rightarrow x_i^{\beta}\right]$$

Pero de acuerdo con la definición 9 , podemos afirmar lo siguiente:

$$\left[\forall i\in\{1,2,..,n\},x_i^{\alpha}\rightarrow x_i^{\beta}\right]$$
$$\Leftrightarrow\left[\forall i\in\{1,2,..,n\},i\in T^{\alpha}\rightarrow i\in T^{\beta}\right]$$

Ahora, por la definición de subconjunto:

$$\left[\forall i\in\{1,2,..,n\},i\in T^{\alpha}\rightarrow i\in T^{\beta}\right]\Leftrightarrow T^{\alpha}\subseteq T^{\beta}$$

Finalmente, por transitividad, y en virtud de que x^{α} y x^{β} son patrones que fueron tomados de forma arbitraria, podemos concluir que:

$$x^{\alpha}\le x^{\beta}\Leftrightarrow T^{\alpha}\subseteq T^{\beta}\quad \text{q. e. d.}$$

Como puede verse, una relación de orden entre patrones, implica una relación de orden entre los respectivos conjuntos característicos y viceversa.

Ahora, en el siguiente lema, demostramos la relación entre la fase de recuperación de la Lernmatrix y los conjuntos característicos.

Lema 2. Sea M una Lernmatrix, sea $\{(x^{\mu},y^{\mu})\mid\mu=1,2,..,m\}$ *el conjunto fundamental de M,* x^{ω} *un patrón cualquiera y* $z^{\omega}=M\bullet x^{\omega}$. *Entonces,* $z_k^{\omega}=\varepsilon(2|T^{k}\cap T^{\omega}|-|T^{\omega}|)$.

Demostración. De acuerdo con la expresión (2) para la fase de aprendizaje y considerando un valor $k\in\{1,2,..,n\}$ cualquiera, la matriz M se construye como sigue:

$$M=\sum_{\mu=1}^{m}y^{\mu}\bullet(F(x^{\mu}))^{T}$$

$$M=\varepsilon\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \ldots\\ 0\\ \ldots\\ 0\end{pmatrix}\bullet(F(x^1))^T+\\ \ldots+\begin{pmatrix}0\\ \ldots\\ 1\\ \ldots\\ 0\end{pmatrix}\bullet(F(x^k))^T+\\ \ldots+\begin{pmatrix}0\\ \ldots\\ 0\\ \ldots\\ 1\end{pmatrix}\bullet(F(x^m))^T\end{bmatrix}$$

$$M=\varepsilon\begin{bmatrix} f(x_1^1) & \ldots & f(x_j^1) & \ldots & f(x_n^1)\\ \ldots & & \ldots & & \ldots\\ f(x_1^k) & \ldots & f(x_j^k) & \ldots & f(x_n^k)\\ \ldots & & \ldots & & \ldots\\ f(x_1^m) & \ldots & f(x_j^m) & \ldots & f(x_n^m)\end{bmatrix} \qquad (3)$$

Ahora, si queremos recuperar el patrón y^ω a partir del patrón x^ω, tenemos que calcular el vector z^ω aplicando la expresión (1) que corresponde a la primera parte de la fase de recuperación:

$$z^\omega = M \bullet x^\omega$$

Aplicando la expresión (3) en la expresión anterior, se tiene:

$$M=\varepsilon\begin{bmatrix} f(x_1^1) & \ldots & f(x_j^1) & \ldots & f(x_n^1)\\ \ldots & & \ldots & & \ldots\\ f(x_1^k) & \ldots & f(x_j^k) & \ldots & f(x_n^k)\\ \ldots & & \ldots & & \ldots\\ f(x_1^m) & \ldots & f(x_j^m) & \ldots & f(x_n^m)\end{bmatrix}\bullet x^\omega$$

Es decir:

$$z^\omega=\varepsilon\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^n f(x_j^1)x_j^\omega\\ \ldots\\ \sum_{j=1}^n f(x_j^k)x_j^\omega\\ \ldots\\ \sum_{j=1}^n f(x_j^m)x_j^\omega\end{bmatrix}$$

Esto significa que para algún valor $k\in\{1,2,..,n\}$ la componente k-ésima de z^ω se expresa así:

$$z_k^\omega=\varepsilon\sum_{j=1}^n f(x_j^k)x_j^\omega$$

Ahora, de acuerdo con la definición 9, y dado que los términos en donde x_j^ω no influyen en la suma, la expresión anterior se reduce a:

$$z_k^\omega=\varepsilon\sum_{j\in T^\omega} f(x_j^k) \qquad (4)$$

Donde la sumatoria tiene exactamente $|T^\omega|$ sumandos y de acuerdo a la definición 5, cada sumando es igual a 1 o a -1. Si r es el número de unos en la sumatoria, entonces $|T^\omega|-r$ es el número de -1, entonces la expresión (4) se transforma en:

$$z_k^\omega=\varepsilon\left[r-(|T^\omega|-r)\right]$$

$$z_k^\omega=\varepsilon\left[2r-|T^\omega|\right] \qquad (5)$$

Así, r es igual al número de unos que tiene el patrón x^k, tomando en cuenta sólo las entradas j tal que $x_j^\omega=1$, por lo que r puede ser visto como la cardinalidad de un conjunto de índices j donde $x_j^k=1$ tal que $x_j^\omega=1$, es decir,

$$r=\left|\left\{j\mid x_j^k=1, talque, x_j^\omega=1\right\}\right|$$

$$r=\left|\left\{j\mid x_j^k=1\wedge x_j^\omega=1\right\}\right|$$

$$r=\left|\{j\mid x_j^k=1\}\cap\{j\mid x_j^\omega=1\}\right| \qquad (6)$$

Pero de acuerdo con la definición de conjunto característico, $T^k = \{i \mid x_i^k = 1\}$ y $T^\omega = \{i \mid x_i^\omega = 1\}$, por lo que sustituyendo en (5).

$$r = |T^k \cap T^\omega| \qquad (7)$$

Finalmente, y sustituyendo (7) en (5), concluimos que:

$$z_k^\omega = \varepsilon(2|T^k \cap T^\omega| - |T^\omega|) \text{ q. e. d.}$$

Hasta el momento, se han dado las bases para relacionar los conjuntos característicos con la fase de recuperación. El siguiente punto es entonces, establecer una conexión entre éste concepto y las condiciones necesarias y suficientes para recuperación perfecta. En los siguientes dos lemas, se sintetiza el funcionamiento de la Lernmatrix y se abre la puerta para entender las propiedades más importantes que se requieren de una memoria asociativa.

Lema 3. Sea M una Lernmatrix, sea $\{(x^\mu, y^\mu) \mid \mu = 1,2,..,m\}$ el conjunto fundamental de M y x^ω un patrón, el cual puede o no pertenecer al conjunto fundamental de M. Entonces, el patrón recuperado al presentar x^ω a M será $\tilde{y}^\alpha$, con $y^\alpha \le \tilde{y}^\alpha$, $\alpha \in \{1,2,..,m\}$ si y sólo si $|T^\alpha \cap T^\omega| \geq |T^\beta \cap T^\omega| \; \forall \beta \in \{1,2,..,m\}$ y $\alpha \neq \beta$.

Demostración. Sea M una Lernmatrix, $\{(x^\mu, y^\mu) \mid \mu = 1,2,..,m\}$ el conjunto fundamental de M y x^ω un patrón cualquiera de dimensión n. Sea a un índice cualquiera tal que $\alpha \in \{1,2,..,m\}$ y sea $\tilde{y}^\alpha$, con $y^\alpha \le \tilde{y}^\alpha$, el patrón recuperado al presentar x^ω a M.

Luego, de acuerdo con la definición 8,

$$y^\alpha \le \tilde{y}^\alpha \Leftrightarrow \left[\forall i \in \{1,2,..,m\}, y_i^\alpha \to \tilde{y}_i^\alpha\right]$$

Pero considerando la manera en que se forma cada uno de los y^μ del conjunto fundamental, sabemos que $y_\mu^\mu = 1$ y $y_i^\mu = 0 \forall i \in \{1,2,..,m\}$ con $i \neq \mu$. En particular, $y_\alpha^\alpha = 1$ y $y_i^\alpha = 0 \forall i \in \{1,2,..,m\}$ con $i \neq \alpha$, por tanto,

$$\left[\forall i \in \{1,2,..,m\}, y_i^\alpha \to \tilde{y}_i^\alpha\right] \Leftrightarrow \tilde{y}_\alpha^\alpha = 1$$

Ahora, de acuerdo a la expresión (2) que corresponde a la segunda parte de la fase de recuperación, para que $\tilde{y}_\alpha^\alpha = 1$, es condición necesaria y suficiente que:

$$z_\alpha^\omega = \bigvee_{h=1}^{m} z_h^\omega \qquad (8)$$

donde z_k^ω es la k-ésima componente del vector $z^\omega = M \bullet x^\omega$. Luego, tomando un índice ß arbitrario, con $\beta \in \{1,2,..,m\}$ y $\alpha \neq \beta$, (8) se puede rescribir como:

$$z_\alpha^\omega \ge z_\beta^\omega \qquad (9)$$

Pero por el lema 2, la k-ésima componente del vector $z^\omega = M \bullet x^\omega$ es igual a:

$$z_k^\omega = \varepsilon(2|T^k \cap T^\omega| - |T^\omega|)$$

de donde

$$z_\alpha^\omega = \varepsilon(2|T^\alpha \cap T^\omega| - |T^\omega|)$$

y

$$z_\beta^\omega = \varepsilon(2|T^\beta \cap T^\omega| - |T^\omega|)$$

Por lo que sustituyendo en la expresión 9:

$$\varepsilon(2|T^\alpha \cap T^\omega| - |T^\omega|) \ge \varepsilon(2|T^\beta \cap T^\omega| - |T^\omega|)$$

Es decir,

$$|T^\alpha \cap T^\omega| \geq |T^\beta \cap T^\omega|$$

Finalmente, por transitividad, y en virtud de que a y ß fueron tomados de forma arbitraria, concluimos que:

$$y^\alpha \le \tilde{y}^\alpha \Leftrightarrow$$
$$|T^\alpha \cap T^\omega| \geq |T^\beta \cap T^\omega| \; \forall \beta \in \{1,2,..,m\} \text{ y}$$

$\alpha \neq \beta$ q. e. d.

Lema 4. Sea M una Lemmatrix, sea $\left\{(x^\mu, y^\mu) \mid \mu = 1,2,..,m\right\}$ el conjunto fundamental de M y x^ω un patrón, el cual puede o no pertenecer al conjunto fundamental de M. Entonces, el patrón recuperado al presentar x^ω a M será $\tilde{y}^\alpha$, con $y^\alpha = \tilde{y}^\alpha$, $\alpha \in \{1,2,..,m\}$ sí y sólo si $|T^\alpha \cap T^\omega| > |T^\beta \cap T^\omega| \; \forall \beta \in \{1,2,..,m\}$ y $\alpha \neq \beta$.

Demostración. Sea M una Lemmatrix, $\left\{(x^\mu, y^\mu) \mid \mu = 1,2,..,m\right\}$ el conjunto fundamental de M y x^ω un patrón cualquiera de dimensión n. Sea a un índice cualquiera tal que $\alpha \in \{1,2,..,m\}$ y sea $\tilde{y}^\alpha$, con $y^\alpha = \tilde{y}^\alpha$, el patrón recuperado al presentar x^ω a M.

Considerando la manera en que se forma cada uno de los y^μ del conjunto fundamental, sabemos que $y^\mu_\mu = 1$ y $y^\mu_i = 0 \forall i \in \{1,2,..,m\}$ con $i \neq \mu$. En particular, $y^\alpha_\alpha = 1$ y $y^\alpha_i = 0 \forall i \in \{1,2,..,m\}$ con $i \neq \alpha$, por tanto,

$$y^\alpha = \tilde{y}^\alpha \Leftrightarrow \tilde{y}^\alpha_\alpha = 1 \text{ y } y^\alpha_i = 0 \forall i \in \{1,2,..,m\}$$

Ahora, de acuerdo a la expresión (2) que corresponde a la segunda parte de la fase de recuperación, para que $\tilde{y}^\alpha_\alpha = 1$ y $y^\alpha_i = 0 \forall i \in \{1,2,..,m\}$, es condición necesaria y suficiente que:

$$z^\omega_\alpha = \bigvee_{h=1}^{m} z_h{}^\omega \text{ y } z^\omega_\alpha \neq z^\omega_i \forall i \in \{1,2,..,m\} \tag{10}$$

donde $z_k{}^\omega$ es la k-ésima componente del vector $z^\omega = M \bullet x^\omega$. Luego, tomando un índice ß arbitrario, con $\beta \in \{1,2,..,m\}$ y $\alpha \neq \beta$, (8) se puede rescribir como:

$$z_\alpha{}^\omega > z_\beta{}^\omega \tag{11}$$

Pero por el lema 2, la k-ésima componente del vector $z^\omega = M \bullet x^\omega$ es igual a:

$$z_k{}^\omega = \varepsilon(2|T^k \cap T^\omega| - |T^\omega|)$$

de donde

$$z_\alpha{}^\omega = \varepsilon(2|T^\alpha \cap T^\omega| - |T^\omega|)$$

y

$$z_\beta{}^\omega = \varepsilon(2|T^\beta \cap T^\omega| - |T^\omega|)$$

Por lo que sustituyendo en la expresión 11:

$$\varepsilon(2|T^\alpha \cap T^\omega| - |T^\omega|) > \varepsilon(2|T^\beta \cap T^\omega| - |T^\omega|)$$

Es decir,

$$|T^\alpha \cap T^\omega| > |T^\beta \cap T^\omega|$$

Finalmente, por transitividad, y en virtud de que a y ß fueron tomados de forma arbitraria, concluimos que:

$$y^\alpha = \tilde{y}^\alpha \Leftrightarrow$$
$$|T^\alpha \cap T^\omega| > |T^\beta \cap T^\omega| \; \forall \beta \in \{1,2,..,m\} \text{ y}$$

$\alpha \neq \beta$ q. e. d.

Ahora, finalmente, presentamos los dos teoremas que influyen en que la Lemmatrix sea perfecta, de acuerdo con la definición 4.

Teorema 1. Sea M una Lemmatrix, sea $\left\{(x^\mu, y^\mu) \mid \mu = 1,2,..,m\right\}$ el conjunto fundamental de M y x^α un patrón, el cual pertenece al conjunto fundamental de M. Entonces, el patrón recuperado al presentar x^α a M será $\tilde{y}^\alpha$, con $y^\alpha \leq \tilde{y}^\alpha$,

Demostración. Sea M una Lemmatrix, $\left\{(x^\mu, y^\mu) \mid \mu = 1,2,..,m\right\}$ el conjunto fundamental de M y x^α un patrón cualquiera que pertenece al conjunto fundamental de M. Sea $\tilde{y}^\alpha$ el patrón recuperado al presentar x^α a M. De acuerdo con el Lema 3 y tomando a y ß arbitrarios tal que $\alpha, \beta \in \{1,2,..,m\}$ y a?ß.

$$y^\alpha \leq \tilde{y}^\alpha \Leftrightarrow |T^\alpha \cap T^\alpha| \geq |T^\beta \cap T^\alpha|$$

es decir,

$$y^\alpha \leq \tilde{y}^\alpha \Leftrightarrow |T^\alpha| \geq |T^\beta \cap T^\alpha|$$

Luego, dado que para dos conjuntos A y B cualesquiera, $A \supseteq B \Leftrightarrow |A| \geq |B|$ y como $T^{\alpha} \supseteq T^{\beta} \cap T^{\alpha}$, entonces la proposición

$$|T^{\alpha}| \geq |T^{\beta} \cap T^{\alpha}|$$

es cierta, por tanto $y^{\alpha} \leq \tilde{y}^{\alpha}$ es cierta. Finalmente y en virtud de que a y ß fueron tomados de forma arbitraria, el teorema queda demostrado.

Teorema 2. Sea M una Lernmatrix, sea $\{(x^{\mu}, y^{\mu}) \mid \mu = 1,2,..,m\}$ el conjunto fundamental de M y x^{α} un patrón, el cual pertenece al conjunto fundamental de M. Entonces, el patrón recuperado al presentar x^{α} a M será $\tilde{y}^{\alpha}$, con $y^{\alpha} = \tilde{y}^{\alpha}$, si y sólo si la proposición $\forall \beta \in \{,2,..,m\}, \alpha \neq \beta$ y $\neg(x^{\alpha} \leq x^{\beta})$ es cierta.

Demostración. Sea M una Lernmatrix, $\{(x^{\mu}, y^{\mu}) \mid \mu = 1,2,..,m\}$ el conjunto fundamental de M y x^{α} un patrón cualquiera que pertenece al conjunto fundamental de M. Sea $\tilde{y}^{\alpha}$ el patrón recuperado al presentar x^{α} a M. De acuerdo con el Lema 4 y tomando a y ß arbitrarios tal que $\alpha, \beta \in \{1,2,..,m\}$ y a?ß.

$$y^{\alpha} = \tilde{y}^{\alpha} \Leftrightarrow |T^{\alpha} \cap T^{\alpha}| > |T^{\beta} \cap T^{\alpha}|$$

es decir,

$$y^{\alpha} = \tilde{y}^{\alpha} \Leftrightarrow |T^{\alpha}| > |T^{\beta} \cap T^{\alpha}|$$

Luego, dado que para dos conjuntos A y B cualesquiera, $A \supset B \Rightarrow |A| > |B|$ y como $T^{\alpha} \supset T^{\beta} \cap T^{\alpha}$ si y sólo si $\neg(T^{\alpha} \subseteq T^{\beta})$, entonces:

$$|T^{\alpha}| > |T^{\beta} \cap T^{\alpha}| \Leftrightarrow \neg(T^{\alpha} \subseteq T^{\beta}) \qquad (12)$$

Ahora, de acuerdo con el lema 1,

$$x^{\alpha} \leq x^{\beta} \Leftrightarrow T^{\alpha} \subseteq T^{\beta} \qquad (13)$$

Por lo que sustituyendo (13) en (12), tenemos:

$$|T^{\alpha}| > |T^{\beta} \cap T^{\alpha}| \Leftrightarrow \neg(x^{\alpha} \leq x^{\beta})$$

luego, por transitividad,

$$y^{\alpha} = \tilde{y}^{\alpha} \Leftrightarrow \neg(x^{\alpha} \leq x^{\beta})$$

Finalmente y en virtud de que a y ß fueron tomados de forma arbitraria, el teorema queda demostrado.

IV. Conclusiones y trabajo futuro.

En el presente trabajo se ha planteado una forma alternativa de representar la Lernmatrix de Steinbuch, así como las demostraciones de cuatro lemas y dos teoremas que describen las condiciones necesarias y suficientes para que la Lernmatrix de Steinbuch recupere de manera perfecta todo su conjunto fundamental.

Este tipo de estudio es un escalón más en la construcción de un marco teórico que permita describir el funcionamiento de la Lernmatrix.

La relevancia de los resultados presentados en este artículo nos permite afirmar que este trabajo abre caminos claros para quienes se interesen en realizar investigaciones futuras sobre el tema, a saber:

- investigar algunas otras propiedades que pueda exhibir esta memoria asociativa
- las condiciones de respuesta ante ruido aditivo y sustractivo
- las condiciones bajo las cuales se da la saturación al tener varios patrones que formen parte de una misma clase
- la posible creación de una nueva versión de la Lernmatrix, que no sólo trabaje sobre patrones binarios, sino en el dominio de los números enteros, o más aún, en los reales.

Los resultados teóricos obtenidos en este articulo y en investigaciones futuras, representan una importante fuente potencial de nuevos lemas y teoremas. Se sugiere combinar todo este bagaje de ideas relacionadas con la Lernmatrix de Steinbuch, con modelos de memorias asociativas conocidos y que gozan de gran prestigio entre la comunidad científica, como son: El modelo de Kanerva, la memoria Hopfield, las BAM de Kosko, las Memorias Asociativas Morfológicas y las Memorias Asociativas $\alpha\beta$.

Agradecimientos.

Los autores agradecen el apoyo que recibieron de las siguientes instituciones, para la realización de este trabajo: Instituto Politécnico Nacional, COFAA y Secretaría Académica del IPN, CONACyT y Sistema Nacional de Investigadores.

REFERENCIAS

[1] Sánchez-Garfias, F. A., Díaz-de-León, J. L. & Yáñez, C. (2002). Lemmatrix: Condiciones necesarias y suficientes para recuperación perfecta, Memoria del CIARP 2002, México, D. F., 437-448.
[2] Steinbuch, K. (1961). Die Lernmatrix, Kybernetik, 1, 1, 36-45.
[3] Steinbuch, K. & Frank, H. (1961). Nichtdigitale Lernmatrizen als Perzeptoren, Kybernetik, 1, 3, 117-124.
[4] Kohonen, T. (1972). Correlation matrix memories, IEEE Transactions on Computers, C-21, 4, 353-359.
[5] Amari, S. (1977). Neural theory of association and concept-formation, Biological Cybernetics, 26, 175-185.
[6] Anderson, J. A. & Rosenfeld, E. (Eds.) (1990). Neurocomputing: Fundations of Research, Cambridge: MIT Press.
[7] Anderson, J. R. & Bower, G. (1977). Memoria Asociativa, México: Limusa.
[8] Bosch, H. & Kurfess, F. J. (1998). Information storage capacity of incompletely connected associative memories, Neural Networks (11), 5, 869-876.
[9] Díaz-de-León, J. L. & Yáñez, C. (1999). Memorias asociativas con respuesta perfecta y capacidad infinita, Memoria del TAINA'99, Mexico, D.F., 23-38.
[10] Hassoun, M. H. (Ed.) (1993). Associative Neural Memories, New York: Oxford University Press.
[11] Palm, G., Schwenker, F., Sommer F. T. & Strey, A. (1997). Neural associative memories, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), Associative Processing and Processors, (pp. 307-326). Los Alamitos: IEEE Computer Society.
[12] Simpson, P. K. (1990). Artificial Neural Systems, New York: Pergamon Press.
[13] Yáñez-Márquez, C. (2002). Memorias Asociativas basadas en Relaciones de Orden y Operadores Binarios. Tesis doctoral, CIC-IPN, México.
[14] Yáñez-Márquez, C. & Díaz-de-León Santiago, J.L. (2001). Lernmatrix de Steinbuch, IT-48, Serie Verde, CIC-IPN, México.